

Periodische Funktionen

Von den periodischen Funktionen werden im Oberstufenunterricht in der Regel nur die Sinus- und die Kosinusfunktion und ihre Schaubilder behandelt. Schon der Tangens, der immerhin zum Berechnen von Steigungswinkeln in Dreiecken eine Rolle spielt, wird als Funktion in der Oberstufenmathematik seit einigen Jahren ausgelassen.

Es existieren jedoch noch weitere periodische Funktionen, einige trigonometrisch, andere auch nicht, die ein weites Feld in der Mathematik eröffnen.

Im Rahmen der Wahlgebiete bieten periodische Funktionen ein schönes Thema für Schüler, um sich – bildlich gesprochen – mit vergessenen Inseln der Schulmathematik zu befassen und diese zu entdecken.

Definition:

Eine Funktion heißt periodisch mit der Periode k , wenn $f(x + k) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. k ist eine positive Zahl. Statt der Periode betrachtet man häufig auch die Frequenz, d. h. den Kehrwert der Periode.

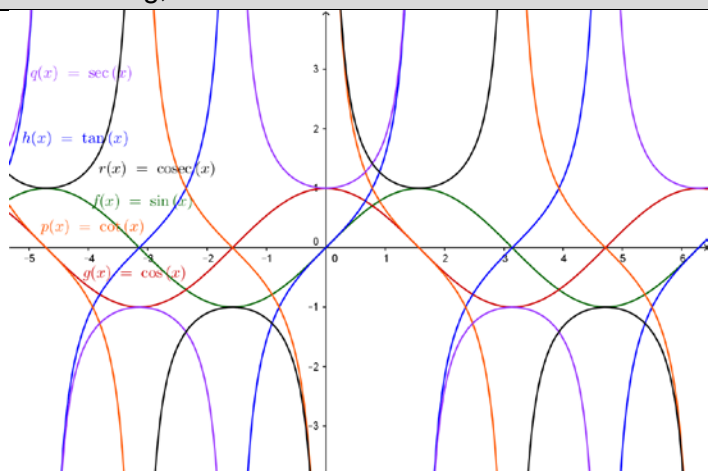
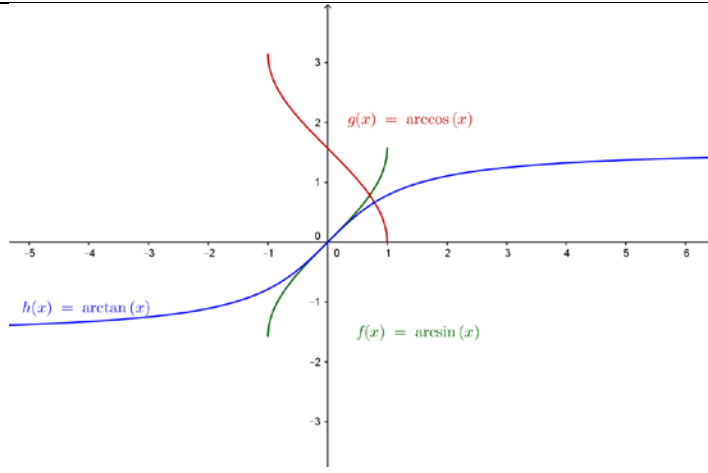
In der Natur oder Umwelt der Lernenden existieren zahlreiche periodische Vorgänge, von der Höhe oder dem Winkel des Uhrzeigers einer Uhr in Abhängigkeit von der Uhrzeit bis hin zur Tageslänge, Jahreszeiten oder dem Sonnenstand in Abhängigkeit vom Tag des Jahres. Die Gezeiten am Meer sind ein gerne gewähltes Beispiel in Schulaufgaben, wobei eine Modellierung hier schnell zu einem stark vereinfachten (qualitativ) oder hoch komplexen Modell (quantitativ, und Berücksichtigung der Sonne) führt. Im technischen Gymnasium liefern periodische Funktionen in der Physik (Tonerzeugung) oder Elektrotechnik zahlreiche anschauliche Beispiele.

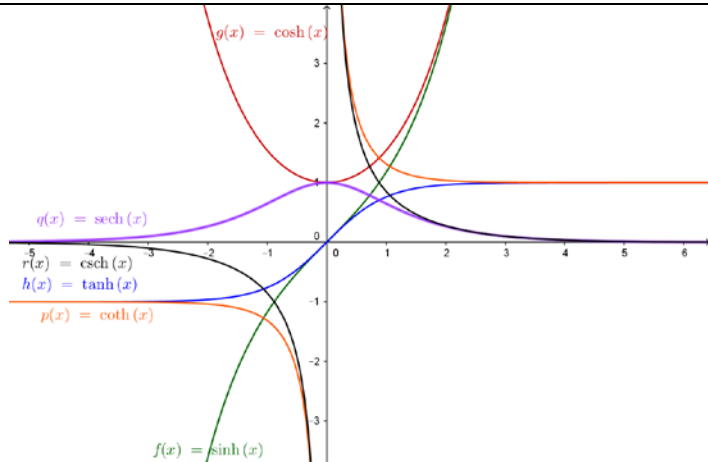
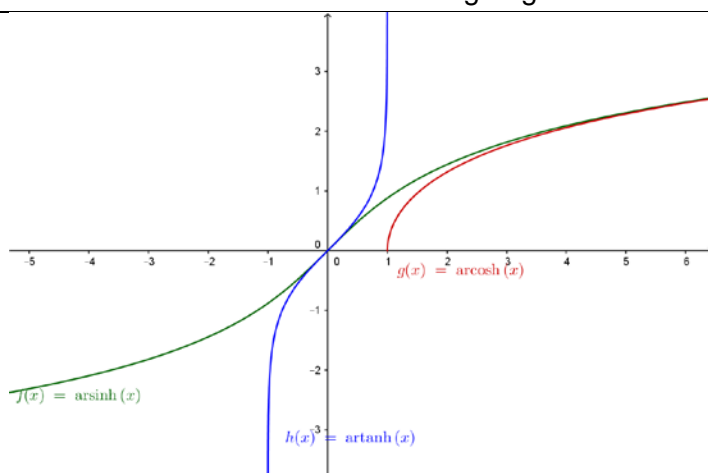
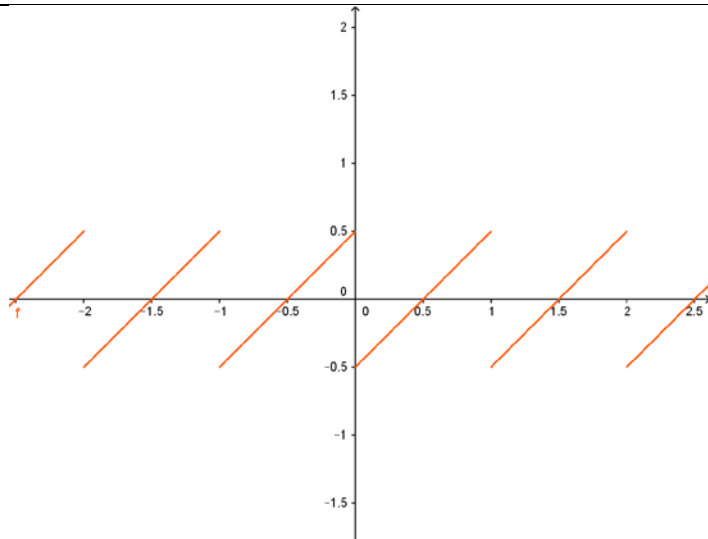
Ein Einstieg könnte sein, dass sich die Schülerinnen und Schüler über periodische Vorgänge Gedanken machen und das Schaubild selbst gewählter oder vorgegebener Beispiele aus der Natur skizzieren und untersuchen.

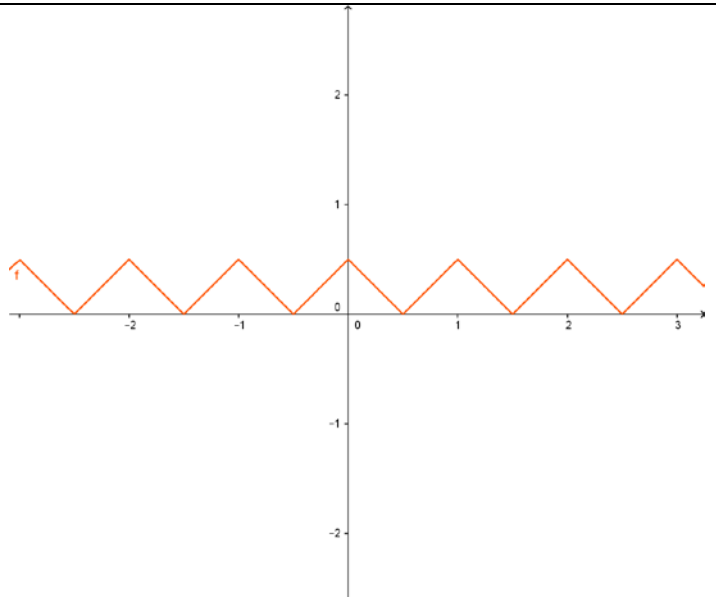
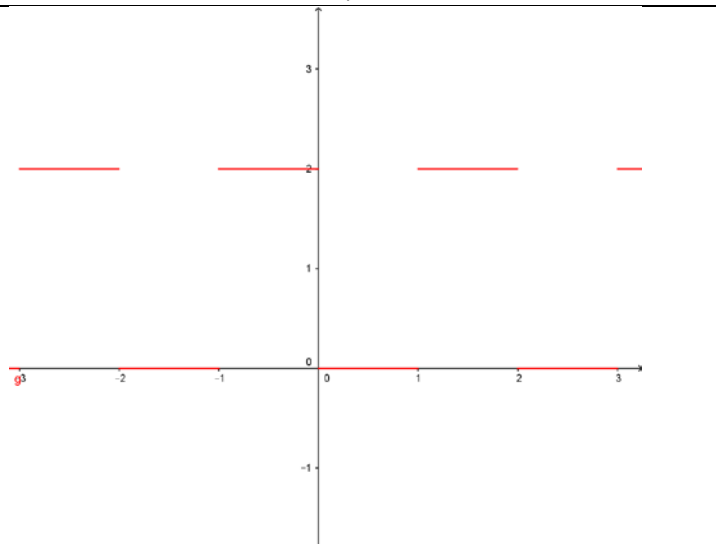
Im Folgenden sind einige Funktionen, die von den Schülerinnen und Schülern einfach untersucht und erforscht werden können. Die Schülerinnen und Schüler können sich mit Hilfe von alten Schulbüchern, on- und offline-Lexika und über Anwendungen, Ableitungen, Stammfunktion und das Wesen dieser Funktionen informieren und diese charakterisieren.

Nicht alle der Funktionen sind übrigens tatsächlich periodisch, da sie aber im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen stehen, sind sie hier mit aufgeführt.

Das Ergebnis kann wiederum in Form einer schriftlichen Ausarbeitung oder eines Vortrags präsentiert werden.

Funktion	Abkürzung	Bemerkung, Schaubilder
Sinus Cosinus Tangens Cotangens Sekans Cosekans	Sin Cos Tan Cot Sec Cosec oder csc	 <p>Diese sechs Funktionen kann man direkt am Dreieck im Einheitskreis zeigen und definieren. Wie sind die letzten drei definiert?</p>
Arkussinus Arkuscosinus Arkustangens Arkuscotangens Arkussekans Arkuscosekans	Arcsin Arccos Arctan Arccot Arcsec Arccsc	 <p>Bei Taschenrechnern hat es sich eingebürgert, z. B. \sin^{-1} statt arcsin zu schreiben. GeoGebra zeichnet die letzten drei Funktionen nicht, aber wie sehen sie aus?</p>
Sinus versus Cosinus versus Co Sinus versus Co Cosinus versus	Versin Vercosin Coversin Covercosin	<p>Die Versus-Funktionen sind heute kaum mehr üblich, lassen sich aber am Dreieck im Einheitskreis einzeichnen. Und früher gab es auch eine Anwendung. Welche war das?</p>

<p>Sinus hyperbolicus</p> <p>Cosinus hyperbolicus</p> <p>Tangens hyperbolicus</p> <p>Cotangens hyperbolicus</p> <p>Sekans hyperbolicus</p> <p>Cosekans hyperbolicus</p>	<p>Sinh</p> <p>Cosh</p> <p>Tanh</p> <p>Coth</p> <p>Sech</p> <p>Csch</p>	 <p>Die Hyperbolicus-Funktionen werden alle mit Hilfe von e^x definiert. Welche Anwendungen gibt es?</p>
<p>Areasinus hyperbolicus</p> <p>Areacosinus hyperbolicus</p> <p>Areatangens hyperbolicus</p> <p>Areacotangens hyperbolicus</p> <p>Areasekans hyperbolicus</p> <p>Areacosekans hyperbolicus</p>	<p>Arsinh</p> <p>Arcosh</p> <p>Artanh</p> <p>Arcoth</p> <p>Arsech</p> <p>Arcsch</p>	 <p>Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbolicus-Funktionen. GeoGebra kann nur die ersten drei zeichnen. Wie sehen die anderen aus? Gibt es Anwendungen?</p>
<p>Sägezahnfunktion</p>		

Dreiecksfunktion		
Treppenfunktion		

Die Summe (Überlagerung) von zwei periodischen Funktionen ist in der Regel auch wieder eine periodische Funktion.

Die letzten drei Funktionen lassen sich über eine Taylorreihen-Entwicklung auch als Summe von trigonometrischen Funktionen beschreiben. Alle drei Funktionen spielen in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. Siehe Quelle [2].

Die oben aufgeführten Funktionen sind bis auf die \sin , \cos , \tan und die letzten drei eher von historischem oder akademischem Interesse. Für eine Untersuchung durch Schülerinnen und Schüler interessant sind vor allem die historischen Anwendungen und die Beziehungen der Funktionen untereinander. So lassen sich z. B. die Quadrate von \sin , \cos , \tan , \cot , \sec und cosec durch jede der anderen Funktionen beschreiben. Auch die Ableitungen aller Funktionen sind von einem gewissen Belange, weil sich hier ebenfalls interessante Beziehungen ergeben.

Eine weitere Frage für Schülerinnen und Schüler könnte auch sein, aus welchem Grund die Hyperbolicus-Funktionen die Namen der trigonometrischen Funktionen besitzen, obwohl sie über die e-Funktion definiert werden. Eine Antwort ist, dass die Additionstheoreme und die Zusammenhänge analog zu den trigonometrischen Funktionen sind.

Additionstheoreme

Die Additionstheoreme und die Zusammenhänge (s. o.) der trigonometrischen Funktionen waren früher wichtige Werkzeuge, um Werte derselben berechnen zu können. In großen Tabellen waren einige Werte vorhanden, über die Additionstheoreme ließen sich die restlichen Werte berechnen.

Heute sind sie für Rechnende fast schon irrelevant, weil digitale Rechenwerkzeuge existieren. Diese wiederum dürften ihre Ergebnisse aus den Additionstheoremen und Beziehungen der trigonometrischen Funktionen untereinander beziehen.

Haben die Schüler das Wahlthema 4.4 (Komplexe Zahlen) bearbeitet, lassen sich einige der Additionstheoreme einfach beweisen.

Hier zwei Beispiele:

1.) Nach der Eulerschen Formel ist $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

Nun ist einerseits $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix+iy} = e^{i(x+y)}$

Die linke Seite ist also

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn der Real- und Imaginärteil gleich sind, also ist

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Wenn man Additionstheoreme kennt, kann man daraus neue Theoreme ableiten.

2.) Wenn man weiß, dass

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) \text{ und } \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

ist, dann kann man $\sin(4x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \sin(4x) &= 2\sin(2x) \cdot \cos(2x) = 2(2\sin(x) \cdot \cos(x)) \cdot (2\cos^2(x) - 1) \\ &= 8\sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4\sin(x) \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Wenn man also den sin und cos eines Winkels kennt, kann man den Sinus des vierfachen Winkels berechnen.

Diese Formel lässt sich auch über die komplexen Zahlen erreichen, wenn auch mit etwas mehr Aufwand.

Für die Schülerinnen und Schüler im Kurs ergibt sich hier die Möglichkeit,

- a) Beweise zu führen und
- b) historisch ehemals notwendige Beziehungen in der Elektrotechnik und EDV wieder zu finden. Besonders für Schülerinnen und Schüler des technischen Gymnasiums finden sich hier Ansatzpunkte.

Quellen:

- [1] www.math.uni-bielefeld.de/~sek/funktion/leit07.pdf
- [2] www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html
- [3] [de.wikipedia.org/wiki/Sinus versus und Kosinus versus](http://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_versus_und_Kosinus_versus)
- [4] Teubner-Taschenbuch der Mathematik, B. B. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996, S. 56-73